ĐẠI SỐ VÀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH 1-2

Giáo trình Đại học Đại cương Ngành Toán-Tin học

Tạ Lê Lợi

- Đại Học Đàlạt -

- 2005 -

Đại số và Hình học giải tích 1-2

Tạ Lê Lợi

Mục lục

Phần I:

Phần II:

0. Kiến thức chuẩn bị

Chương này nêu định nghĩa về các cấu trúc đại số cơ bản là nhóm, vành và trường. Phần tiếp theo là một số kiến thức tối thiểu về số phức và đa thức.

1. Các cấu trúc đại số cơ bản

1.1 Định nghĩa. Cho A là môt tập hợp. Một **phép toán hai ngôi** trên A là một ánh xạ:

$$\star : A \times A \to A$$

Khi đó ảnh của cặp $(x, y) \in A \times A$ bởi ánh xạ $\star$ sẽ được ký hiệu là $x \star y$

- Phép toán $\star$ gọi là có **tính kết hợp** nếuu[1] $(x \star y) \star z = x \star (y \star z),\ \forall x, y, z \in A$
- Phép toán $\star$ gọi là có **tính giao hoán** nếuu $x \star y = y \star x,\ \forall x, y \in A$
- Phần tử $e \in A$, gọi là **phần tử đơn vị** , nếuu $x \star e = e \star x = x,\ \forall x \in A$

Khi $\star$ viết theo lối cộng $+$ thì phần tử đơn vị gọi là **phần tử không** và ký hiệu là 0.
Khi $\star$ viết theo lối nhân $\cdot$ thì phần tử ký hiệu là 1.

- Giả sử phép toán $\star$ có phần tử đơn vị e. Khi đó $x \in A$ gọi là khả nghịch nếuu tồn tại $x' \in A$ sao cho: $x \star x' = x' \star x = e$. Khi đó x' phần tử **nghịch đảo** của x.

Khi $\star$ viết theo lối cộng, thì phần tử nghịch đảo của x gọi là **phần tử đối** và ký hiệu là $-x$. Khi $\star$ viết theo lối nhân, thì phần tử nghịch đảo của x ký hiệu là x^{-1} hay $\dfrac{1}{x}$.

Nhận xét. Phần tử đơn vị nếu có là duy nhất:
Nếu e_1, e_2 là hai phần tử đơn vị, thì $e_1 = e_1 \star e_2 = e_2$.
Nhận xét. Nếu $\star$ có tính kết hợp, thì phần tử nghịch đảo của x nếu có là duy nhất:
Nếu x', x'' là hai phần tử nghịch đảo của x, thì $x' = x' \star e = x' \star (x \star x'') = (x' \star x) \star x'' = e \star x'' = x''$.

Bài tập: Hãy xét các phép toán cộng và nhân trên $A := \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ có tính chất gì? Có phần tử đơn vị? Có phần tử nghịch đảo?

1.2. Nhóm. Một **nhóm** là một cặp $(G, \star)$, trong đó G là một tập hợp không rỗng, còn $\star$ là một phép toán hai ngôi trên G, thoả các điều kiện sau:
(G1) $\star$ có tính kết hợp.
(G2) $\star$ có phần tử đơn vị.
(G3) Mọi phần tử của G đều có phần tử nghịch đảo.
Nhóm G được gọi là **nhóm giao hoán** hay **nhóm Abel** nếu:
(G4) $\star$ có tính giao hoán.

Người ta thường nói nhóm G thay vì $(G, \star)$ khi đã ngầm hiểu phép toán nào. Qui ước này cũng dùng cho khái niệm vành, trường tiếp sau.

[1] Trong giáo trình này: **nếuu = nếu và chỉ nếu**.

Ví dụ.
a) Tập $\mathbf{N}$ với phép cộng không là nhóm vì không chứa phần tử đối. Tập $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ là nhóm giao hoán với phép cộng, nhưng không là nhóm với phép nhân vì 0 không có phần tử nghịch đảo.
b) Tập các song ánh từ một tập X lên chính X là một nhóm với phép hợp ánh xạ. Nói chung nhóm này không giao hoán.

1.3 Vành. Một **vành** là một bộ ba $(R, +, \cdot)$, trong đó R là một tập không rỗng, còn $+$ và $\cdot$ là các phép toán trên R, thoả các điều kiện sau:
(R1) $(R, +)$ là một nhóm giao hoán.
(R2) Phép nhân $\cdot$ có tính kết hợp.
(R3) Phép nhân có tính **phân phối** về hai phía đối với phép cộng:

$$x(y+z) = xy + xz \quad \text{và} \quad (y+z)x = yx + zx \quad \forall x, y, z \in R$$

Nếu phép nhân có tính giao hoán thì R gọi là **vành giao hoán**.

Ví dụ.
a) $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ với phép cộng và nhân là các vành giao hoán.
b) $\mathbf{Z}_p$ các lớp các số nguyên đồng dư theo một số p là vành giao hoán với phép cộng và nhân được định nghĩa:

$$[m] + [n] = [m+n], \ [m][n] = [mn]$$

1.3 Trường. Một **trường** là một vành giao hoán có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi phần tử khác không của K đều có phần tử nghịch đảo. Một cách đầy đủ, một trường là bộ ba $(K, +, \cdot)$, trong đó K là tập không rỗng, $+$ và $\cdot$ là các phép toán trên K thoả 9 điều kiện sau với mọi $x, y, z \in K$:
(F1) $(x+y)+z = x+(y+z)$
(F2) $\exists 0 \in K, \ x+0 = 0+x = x$
(F3) $\exists -x \in K, \ x+(-x) = -x+x = 0$
(F4) $x+y = y+x$
(F5) $(xy)z = x(yz)$
(F6) $\exists 1 \in K, 1 \neq 0, \ x1 = 1x = x$
(F7) Khi $x \neq 0, \exists x^{-1} \in K$, $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$
(F8) $xy = yx$
(F9) $x(y+z) = xy + xz$

Ví dụ.
a) Vành $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ không là trường. $(\mathbf{Q}, +, \cdot), (\mathbf{R}, +\cdot)$ là các trường.
b) Nếu p là số nguyên tố, thì $\mathbf{Z}_p$ là một trường. Hơn nữa, $\mathbf{Z}_p$ là tập hữu hạn và với mọi $[n] \in \mathbf{Z}_p$, $\underbrace{[n] + \cdots + [n]}_{p \text{ lần}} = [0]$.

Đặc số của một trường K, ký hiệu $\text{char}(K)$, là số tự nhiên dương bé nhất sao

cho $\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ lần}} = 0$. Nếu không có số tự nhiên như vậy, thì K gọi là có đặc số 0.

Ví dụ. $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ có đặc số 0, còn $\mathbf{Z}_p$ có đặc số p. Ta có $1+1=0$ trong $\mathbf{Z}_2$!

2. Trường số phức

Trên trường số thực, khi xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ trường hợp $b^2-4ac<0$ phương trình vô nghiệm vì ta không thể lấy căn bậc hai số âm. Để các phương trình như vậy có nghiệm, ta cần thêm vào tập các số thực các căn bậc hai của số âm. Phần này ta sẽ xây dựng tập các số phức $\mathbf{C}$ là mở rộng tập số thực $\mathbf{R}$, trên đó định nghĩa các phép toán cộng và nhân để $\mathbf{C}$ là một trường. Hơn nữa, mọi phương trình bậc hai, chẳng hạn $x^2+1=0$, đều có nghiệm trong $\mathbf{C}$.

2.1 Định nghĩa. Ta dùng ký hiệu i, gọi là **cơ số ảo** , để chỉ nghiệm phương trình $x^2+1=0$, i.e. $i^2=-1$. Tập số phức là tập dạng:

$\mathbf{C} = \{z : \ z = a+ib, \text{ với } a,b \in \mathbf{R}\}$

$z = a+ib$ gọi là số phức, $a = \ \mathrm{Re}z$ gọi là phần thực, $b = \ \mathrm{Im}z$ gọi là phần ảo.

$z_1 = z_2$ nếuu $\mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2, \ \mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2$.

Ta xem $\mathbf{R}$ là tập con của $\mathbf{C}$ khi đồng nhất $\mathbf{R} = \{z \in \mathbf{C} : \ \mathrm{Im}z = 0\}$

Từ "số ảo" sinh ra từ việc người ta không hiểu chúng khi mới phát hiện ra số phức. Thực ra số phức rất "thực" như số thực vậy.

Ví dụ.

a) Số phức $z = -6+i\sqrt{2}$ có phần thực $\mathrm{Re}z = -6$, phần ảo $\mathrm{Im}z = \sqrt{2}$.

b) Để giải phương trình $z^2+2z+4=0$, ta biến đổi $z^2+2z+4 = (z+1)^2+3$.
Vậy phương trình tương đương $(z+1)^2 = -3$. Suy ra nghiệm $z = -1 \pm i\sqrt{3}$.

Sau đây là định nghĩa các phép toán vừa thực hiện.

2.2 Các phép toán. Trên $\mathbf{C}$ có hai phép toán được định nghĩa như sau:

Phép cộng. $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$

Phép nhân. $(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$

Nhận xét. Phép nhân được tính như nhân các số thông thường với chú ý là $i^2=-1$.

Mệnh đề. *Với các phép toán trên* $\mathbf{C}$ *là trường số.*

Mệnh đề trên dễ suy từ định nghĩa với chú ý là:
Phép cộng có phần tử không là $0 = 0+i0$, phần tử đối của $z = a+ib$ là $-z = -a-ib$.
Phép nhân có phần tử đơn vị là $1 = 1+i0$, nghịch đảo của $z = a+ib \neq 0$ là $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$

Sự tồn tại và việc tìm nghịch đảo được thực hiện bởi **phép chia** $\dfrac{a+ib}{c+id}$ $(c+id \neq 0)$

khi giải phương trình $a+ib=(c+id)(x+iy)$. Đồng nhất phần thực, phần ảo ta có

$$\begin{cases} cx-dy &= a \\ dx+cy &= b \end{cases}$$

Vậy $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

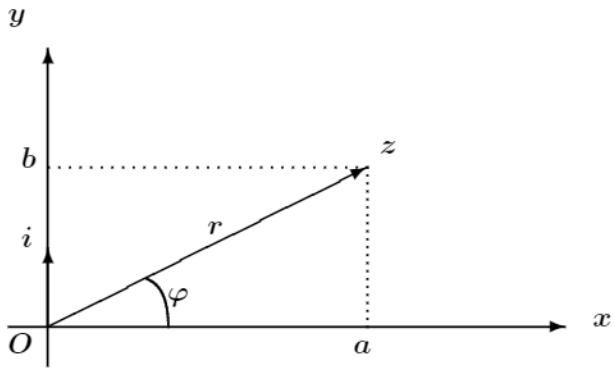
Phép liên hợp. $\overline{z}=a-ib$ gọi là **số phức liên hợp** của $z=a+ib$.

Tính chất. $\overline{\overline{z}}=z,\ \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\ \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2.$

Nhận xét. Nếu $z=a+ib$, thì $z\bar{z}=a^2+b^2$. Từ đó có thể chia 2 số phức bằng cách nhân số liên hiệp của mẫu, chẳng hạn

$$\frac{2-5i}{3+4i}=\frac{(2-5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-23i+20i^2}{3^2-4^2i^2}=\frac{-14-23i}{25}$$

2.3 Biểu diễn số phức. Sau đây là một số biểu diễn khác nhau của số phức



Dạng đại số. $z=a+ib,\quad a,b\in\mathbf{R},\quad i^2=-1.$

Dạng hình học. $z=(a,b),\quad a,b\in\mathbf{R}.$
Trong mặt phẳng đưa vào hệ tọa trục Descartes với $1=(1,0), i=(0,1)$ là 2 vector cơ sở. Khi đó mỗi số phức $z=a+ib$ được biểu diễn bởi vector (a,b), còn $\mathbf{C}$ được đồng nhất với $\mathbf{R}^2$. Trong phép biểu diễn này phép cộng số phức được biểu thị bởi phép cộng vector hình học.

Dạng lượng giác. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$
Biểu diễn số phức $z=(a,b)$ trong tọa độ cực (r,φ), trong đó r là độ dài của z, φ là góc định hướng tạo bởi $1=(1,0)$ và z trong mặt phẳng phức. Ta có:

$$\begin{cases} a &= r\cos\varphi \\ b &= r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} r &= |z|=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \text{gọi là } \textbf{modul} \text{ của } z \\ \varphi &= \operatorname{Arg} z, \quad \text{gọi là } \textbf{argument} \text{ của } z \end{cases}$$

Vậy nếu $z\neq 0$, thì $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$
Ta thấy φ có vô số giá trị sai khác nhau $k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, trong đó có một giá trị $\varphi\in(-\pi,\pi]$

gọi là **giá trị chính** và ký hiệu là arg$z$. Vậy có thể viết

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + k2\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ví dụ. $z = \sqrt{3} - i$ có modul $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, và argument $\arg z = -\frac{\pi}{3}$ (suy từ $\tan\varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ và $\mathrm{Re}z > 0$). Vậy $\sqrt{3} - i = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$.

Mỗi cách biểu diễn số phức có thuận tiện riêng. Sau đây là một số ứng dụng.

2.4 Mệnh đề. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ và $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$
Suy ra **công thức de Moivre**

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \ n \in \mathbf{N}$$

Chứng minh: Nếu $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, thì

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Suy ra $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$, và $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$. □

Nhận xét. Về mặt hình học phép nhân số phức $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với số phức z là phép co dãn vector z tỉ số r và quay góc φ. (xem hình vẽ)

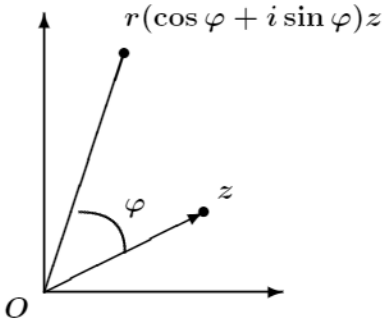
2.5 Căn bậc n của số phức. Cho $z \in \mathbf{C}$ và $n \in \mathbf{N}$. Một **căn bậc** n của z là một số phức w thoả phương trình $w^n = z$.
Để giải phương trình trên, biểu diễn $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.
Từ công thức de Moivre $\rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Suy ra

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt[n]{r} \quad \text{(căn bậc } n \text{ theo nghĩa thực)} \\ n\theta &= \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

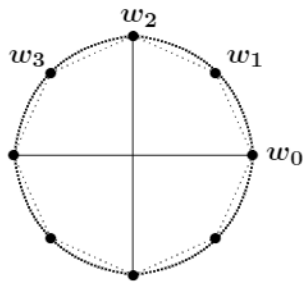
Vậy khi $z \neq 0$, phương trình có đúng n nghiệm phân biệt:

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n})), \quad k = 0, \cdots, n-1.$$

Khi $z \neq 0$, ký hiệu $\sqrt[n]{z}$ là tập n căn bậc n của z. $\sqrt{0} = 0$.
Về mặt hình học chúng là các đỉnh của một đa giác đều n cạnh, nội tiếp đường tròn tâm 0 bán kính $\sqrt[n]{r}$.



Nhân $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với z



$w^n = 1$, với $n = 8$

Ví dụ.
a) Căn bậc n của 1 là n số phức: $1, \omega_n, \cdots, \omega_n^{n-1}$, với $\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$
b) Để tìm các gía trị của $\sqrt[3]{1+i}$, ta biểu diễn $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.
Suy ra $\sqrt[3]{1+i} = 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}))$, $k \in \mathbf{Z}$.
Vậy có 3 giá trị phân biệt là:
$k = 0,\ w_0 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}))$
$k = 1,\ w_1 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})) = \omega_3 w_0$
$k = 2,\ w_2 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\frac{17\pi}{12}) + i\sin(\frac{17\pi}{12})) = \omega_3 w_0$

3. Đa thức

3.1 Định nghĩa. Cho K là một trường. Một **đa thức** trên K là biểu thức dạng

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n,$$

trong đó $n \in \mathbf{N}$, và $a_k \in K, k = 0, \cdots, n$, gọi là hệ số bậc k của $P(X)$.
Hai đa thức gọi là bằng nhau nếuu mọi hệ số cùng bậc của chúng bằng nhau.
Nếu $a_n \neq 0$, thì n gọi là **bậc** của $P(X)$ và ký hiệu $n = \deg P(X)$, $a_n = \mathrm{lc}P(X)$.
Nếu $a_k = 0$ với mọi k, thì $P(X)$ gọi là đa thức không và qui ước $\deg(0) = -\infty$.
Ta thường viết dưới dạng tổng: $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ hay $P = \sum_k a_k X^k$ là tổng vô hạn nhưng chỉ có hữu hạn $a_k \neq 0$.
Ký hiệu $K[X]$ là tập mọi đa thức trên K.

3.2 Các phép toán trên đa thức. Trên $K[X]$ có hai phép toán cộng và nhân định nghĩa như sau:
Phép cộng: $\sum_k a_k X^k + \sum_k b_k X^k = \sum_k (a_k + b_k) X^k$
Phép nhân: $(\sum_i a_i X^i)(\sum_j b_j X^j) = \sum_k c_k X^k$ với $c_k = a_0 b_k + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Mệnh đề. *$K[X]$ là với hai phép toán trên là một vành giao hoán.*

Bài tập: Chứng minh mệnh đề trên.

Nhận xét. $\deg P(X)Q(X) = \deg P(X) + \deg Q(X)$, với mọi $P(X), Q(X) \in K[X]$.

3.3 Phép chia Euclid. *Cho hai đa thức $P_0(X), P_1(X) \in K[X],\ P_1(X) \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất các đa thức $Q(X), R(X) \in K[X]$, sao cho*

$$P_0(X) = Q(X)P_1(X) + R(X), \quad \deg R(X) < \deg P_1(X)$$

Ta gọi $Q(X)$ là **thương** , $R(X)$ là **phần dư** của phép chia $P_0(X)$ cho $P_1(X)$, và được xây dựng cụ thể theo thuật toán sau:

Thuật toán chia Euclid.

Input: $P_0, P_1 \in K[X],\ P_1 \neq 0$

Output: $Q, R \in K[X]$, thoả $P_0 = QP_1 + R,\ \deg R < \deg P_1$.

Trước hết cho $R_0 = P_0, Q_0 = 0$.
Giả sử ở vòng lặp thứ k ta có $Q_k, R_k \in K[X]$, thoả $P_0 = Q_kP_1 + R_k$
Nếu $n_k = \deg R_k - \deg P_1 < 0$, thì đã chia xong $Q = Q_k, R = R_k$
Nếu $n_k = \deg R_k - \deg P_1 > 0$, thì khử hệ số bậc cao nhất của R_k bằng cách:

$$R_{k+1} = R_k - \frac{\text{lc}(R_k)}{\text{lc}(P_1)}X^{n_k}P_1$$

$$Q_{k+1} = Q_k + \frac{\text{lc}(R_k)}{\text{lc}(P_1)}X^{n_k}$$

Ta có $P_0 = Q_{k+1}P_1 + R_{k+1}$
Do $\deg R_{k+1} < \deg R_k$, nên đến vòng lặp thứ $m \leq \deg P_0$, ta có $\deg R_m < \deg P_1$.
Khi đó $Q = Q_m, R = R_m$.

Ví dụ. Thuật toán chia Euclid $X^4 - 2X^3 - 6X^2 + 12X + 15$ cho $X^3 + X^2 - 4X - 4$ có thể thực hiện theo sơ đồ

$$\begin{array}{lllllllllll|l} R_0 & = & X^4 & - & 2X^3 & - & 6X^2 & + & 12X & + & 15 & \underline{X^3 + X^2 - 4X - 4} \\ R_1 & = & & - & 3X^3 & - & 2X^2 & + & 16X & + & 15 & X - 3 \\ R_2 & = & & & & & X^2 & + & 4X & + & 3 & \end{array}$$

Vậy $X^4 - 2X^3 - 6X^2 + 12X + 15 = (X^3 + X^2 - 4X - 4)(X - 3) + X^2 + 4X + 3$

Bài tập: Thực hiện phép chia $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ cho $X - c$.

3.4 Ước chung lớn nhất. Đa thức $P(X) \in K[X]$ gọi là **chia hết cho** đa thức $D(X) \in K[X]$ nếuu tồn tại đa thức $A(X) \in K[X]$, sao cho $P(X) = A(X)D(X)$. Khi đó $D(X)$ gọi là một **ước** của $P(X)$ và ký hiệu $D(X)|P(X)$.
Ước chung lớn nhất của các đa thức $P_0(X), P_1(X) \in K[X]$, là một đa thức $D(X) \in K[X]$, thoả điều kiện:

$$D(X)|P_0(X),\ D(X)|P_1(X) \text{ và nếu } C(X)|P_0(X),\ C(X)|P_1(X) \text{ thì } C(X)|D(X)$$

Khi đó ký hiệu $D(X) = \text{GCD}(P_0(X), P_1(X))$
Nhận xét. Ước chung lớn nhất được xác định sai khác một hằng số tỉ lệ.
Nhận xét. Nếu $P_0 = QP_1 + R$, thì $\text{GCD}(P_0, P_1) = \text{GCD}(P_1, R)$, vì ước chung của